Extrema liés

Lemme 1. *Soit $\ell_1, \dots, \ell_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ qui sont linéairement indépendantes. Alors :*

$$\dim \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \ell_i = n - d$$

Démonstration.

On complète la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ en une base $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ de $(\mathbb{R}^n)^\star$.
On considère la base antéduale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associée.
Alors $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \ell_i$ si, et seulement si, $x \in \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Ainsi :

$$\dim \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \ell_i = n - k$$

□

Proposition 2. *Soit M une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Soient $a \in M$ et U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$. Soient $g_1, \dots, g_{n-d} : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ telles que :*
- *Les formes linéaires $d_x g_1, \dots, d_x g_{n-d}$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$.*
- *$U \cap M = \left\{ x \in U \;\middle|\; \forall i \in [\![1, n-d]\!],\ g_i(x) = 0 \right\}$*

Alors :

$$T_a M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \operatorname{Ker} d_a g_i$$

Démonstration.

Soit $v \in T_a M$, et soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, où $\varepsilon > 0$, telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.
Pour tout $i \in [\![1, n-d]\!]$, et pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a $g_i \circ \gamma(t) = 0$, donc $d_{\gamma(t)} g_i \circ \gamma'(t) = 0$.
En particulier, pour $t = 0$, on a : $d_a g_i(v) = 0$. Donc, pour tout $i \in [\![1, n-d]\!]$, on a $v \in \operatorname{Ker} d_a g_i$.
Ainsi, $v \in \bigcap_{i=1}^{n-d} \operatorname{Ker} d_a g_i$, et $T_a M \subseteq \bigcap_{i=1}^{n-d} \operatorname{Ker} d_a g_i$. Or, par le lemme, $\dim \bigcap_{i=1}^{n-d} \operatorname{Ker} \ell_i = d = \dim T_a M$.
Finalement :

$$T_a M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \operatorname{Ker} d_a g_i$$

□

Théorème 3 (Extrema liés)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $g_1, \ldots, g_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ telles que les formes linéaires $d_x g_1, \ldots, d_x g_k$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$. Posons :*

$$M = \left\{ x \in U \;\middle|\; \forall\, i \in [\![1, k]\!],\ g_i(x) = 0 \right\}$$

Alors, si f a un extremum lié en $a \in M$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k \, d_a g_i$$

Ces réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Démonstration.

On a tout d'abord que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-k$ et de classe $\mathcal{C}^1$, car on reconnait la définition par submersion des sous-variétés dans les hypothèses.

Soient $a \in M$, $v \in T_a M$, et soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, où $\varepsilon > 0$, telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.
Donc, si f admet un extremum lié en a sur M, $f \circ \gamma$ admet un extremum en 0.
Ainsi, $(f \circ \gamma)'(0) = d_{\gamma(0)} f \circ \gamma'(0) = d_a f(v) = 0$, donc $v \in \operatorname{Ker} d_a f$. On a donc $T_a M \subseteq \operatorname{Ker} d_a f$.

La famille $(d_x g_1, \ldots, d_x g_k)$ étant libre par hypothèse, on la complète en une base $(d_x g_1, \ldots, d_x g_k, \ell_{k+1}, \ldots, \ell_n)$ de $(\mathbb{R}^n)^\star$. On considère la base antéduale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associée.
Alors, pour tout $j \in [\![k+1, n]\!]$, et tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $d_a g_i(e_j) = 0$. Donc $\operatorname{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n) \subseteq \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} d_a g_i$.
Or, par la proposition, on a $\dim \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n) = n - k = \dim \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} d_a g_i$. Donc :

$$T_a M = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} d_a g_i = \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

Comme $(d_x g_1, \ldots, d_x g_k, \ell_{k+1}, \ldots, \ell_n)$ est une base de $(\mathbb{R}^n)^\star$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_a g_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \ell_i$$

Or, si $a \in M$ est un extremum lié de f sur M, alors $T_a M \subseteq \operatorname{Ker} d_a f$.
Donc, pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$, on a $d_a f(e_i) = \lambda_i = 0$, et il reste :

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_a g_i$$

□

Conclusion. Ce théorème nous donne une condition nécessaire pour qu'un point d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ réalise un extremum lié d'une fonction sur cette sous-variété. Cela permet de faciliter grandement les problèmes de minimisation avec contrainte. ◁

Références

[Ave] André Avez. *Calcul différentiel.* Masson